Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^2+n}{2n^2}$.
2. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Soit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = \frac{1+2+2^2+\cdots+2^2}{3^n - 2^n}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{2^{n+1}-1}{3^n-2^n}$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n^2 - 4$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2-u_n)$.
   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (d) Déterminer de nouveau $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
3. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2}$.
   (a) Montrer que f est croissante sur $I = [0;2]$ et que $f([0;2]) \subset [0;2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in I,\ f(x) \geq x$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.
   (d) Étudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que (u_n) est convergente.
   (e) En déduire de nouveau $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2x + 1 - 4\sqrt{x-2}.$$

Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 0,5\,\text{cm}$.

1. Montrer que $D_f = [2, +\infty[$ et que :
$$\forall x \in D_f,\ f(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - 4\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right).$$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$. Que peut-on déduire?
3. (a) Vérifier que : $\forall x \in]2, +\infty[,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2 - \frac{4}{\sqrt{x-2}}$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. (a) Montrer que : $\forall x \in]2, +\infty[,\ f'(x) = \frac{2(x-3)}{(1+\sqrt{x-2})\sqrt{x-2}}$.
   (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) - x = \frac{(x-3)(x-11)}{(x+1)+4\sqrt{x-2}}$.
   (b) Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   (c) Tracer (C).
6. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $K = [3, +\infty[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle L que l'on déterminera.
   (b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.
   (c) Tracer g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (d) Montrer que g^{-1} est dérivable en 11 et que $(g^{-1})'(11) = \frac{3}{4}$.
   (e) Vérifier que : $\forall x \in [3, +\infty[,\ g(x) = 2(\sqrt{x-2}-1)^2 + 3$.
   (f) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour $x \in L$.
7. Soit (u_n) la suite réelle définie par :
$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leq u_n \leq 11$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4

Soit h la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2\sqrt{x+1}.$$

1. Vérifier que pour tout $x \geq -1$, on a :
$$x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1.$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ h(x) = (x+1)^2\sqrt{x+1} - 2(x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}.$$
3. En déduire une fonction primitive de h sur $[-1, +\infty[$.
4. Déterminer la primitive H de h sur $[-1, +\infty[$ qui vérifie $H(0) = 1$.

Exercice 5

Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad I = \mathbb{R}_+$.
(b) $f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^5, \quad I = \mathbb{R}$.
(c) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{x}}, \quad I = \mathbb{R}_+^*$.
(d) $f(x) = \sqrt{2x+3}, \quad I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.