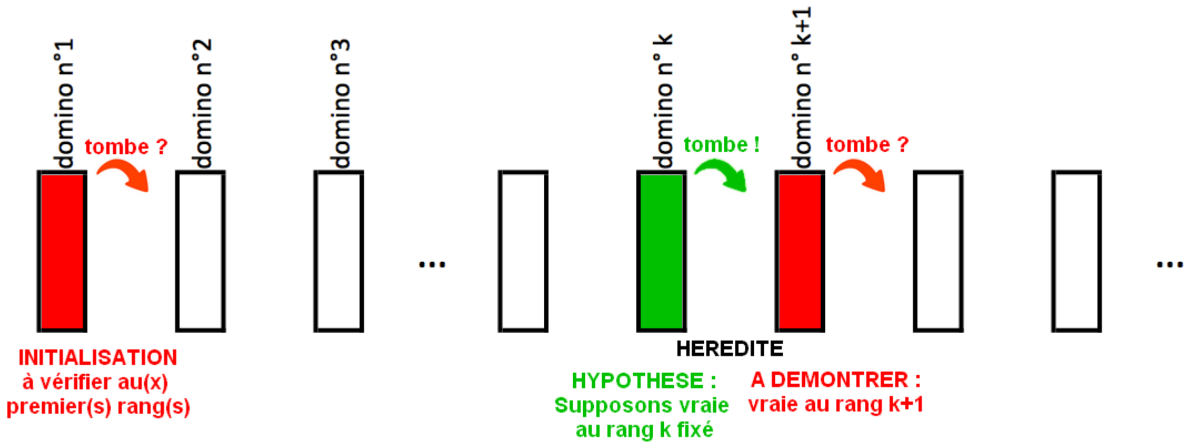
LES SUITES – Chapitre 1/2

Partie 1 : Raisonnement par récurrence

1) Le principe

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.
Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Si on suppose qu'un domino $n°\ (k)$ tombe alors le domino suivant $n°\ (k+1)$ tombe également. C'est ce qu'on appelle le principe d'hérédité.

Définition : On dit qu'une propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang :
Si la propriété est vraie pour un entier k, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Principe du raisonnement par récurrence :
Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),
alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
L'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : On tente d'utiliser une démonstration par récurrence, lorsqu'une démonstration classique n'est pas possible ou est trop difficile..

Méthode : Démontrer une propriété par récurrence

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $2^n > n$.

Correction

- **Initialisation pour n=1 :** → Le premier domino tombe.

$2^1 = 2 > 1$.
La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence : → On suppose que le domino n° (k) tombe.
Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k non nul : $2^k > k$.

- Démontrons que : → Prouvons que le domino n° (k+1) tombe.
La propriété est vraie au rang $k+1$, soit : $2^{k+1} > k+1$???

$2^k > k$, par hypothèse de récurrence
$2 \times 2^k > 2 \times k$
$2^{k+1} > 2k$
$2^{k+1} > k + k$
$2^{k+1} > k + k \geq k + 1$, car $k \geq 1$
$2^{k+1} > k + 1$ → Le domino n° (k+1) tombe.

- **Conclusion :** → Tous les dominos tombent.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit : $2^n > n$.

2) Exemples avec les suites

Méthode : Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

Correction

- **Initialisation pour n = 0 :** → Le premier domino tombe.

$(0+1)^2 = 1 = u_0$.
La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence : → On suppose que le domino n° (k) tombe.
Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k : $u_k = (k+1)^2$.

- Démontrons que : → Prouvons que le domino n° (k+1) tombe.

La propriété est vraie au rang $k+1$, soit : $u_{k+1} = (k+1+1)^2$, soit encore : $u_{k+1} = (k+2)^2$???

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$, par définition
$= (k+1)^2 + 2k + 3$, par hypothèse de récurrence
$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$
$= k^2 + 4k + 4$
$= (k+2)^2$ → Le domino n° (k+1) tombe.

- **Conclusion :** → Tous les dominos tombent.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = (n+1)^2$.

Méthode : Démontrer la monotonie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Correction

On va démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation :** $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2$

donc $u_1 \geq u_0$.
La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k : $u_{k+1} \geq u_k$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$, soit : $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

On a $u_{k+1} \geq u_k$ donc :

$\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k$

$\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2$

$u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

3) Inégalité de Bernoulli

Propriété : Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration au programme :

- **Initialisation :**

$(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$.
La propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$, soit :

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$

On a : $(1+a)^k \geq 1 + ka$, d'après l'hypothèse de récurrence.
Donc : $(1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)$, car $1 + a > 0$.
$(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2$
$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$, car $ka^2 \geq 0$.
Donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n soit : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

4) Le rôle de l'initialisation dans une démonstration par récurrence

L'initialisation (le 1er domino tombe) est indispensable dans une démonstration par récurrence, sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

En effet, démontrons par exemple que la propriété « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire sans vérifier l'initialisation.
Supposons que pour un certain entier k : « 2^k est divisible par 3 ». Donc il existe un entier p tel que : $2^k = 3p$.

$2^{k+1} = 2^k \times 2$
$= 3p \times 2$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
$= 6p$
$= 3 \times 2p$, avec $2p$ entier

Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

Partie 2 : Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite infinie

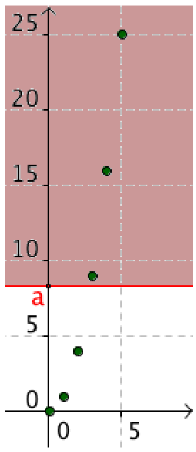
Définition :
On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** $+\infty$**,**

si u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang et on note :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :
La suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
On a par exemple : $u_{100} = 100^2 = 10\ 000$
$u_{1\ 000} = 1\ 000^2 = 1\ 000\ 000$

Les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\ ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

En appliquant l'algorithme ci-contre avec A = 100, on obtient en sortie $n = 3$.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

Le programme correspondant dans différents langages :

TI	CASIO	Python

```
PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
```

```
======SEUIL
"A="?→A↵
0→N↵
2→U↵
While U<A↵
N+1→N↵
4×U→U↵
WhileEnd↵
N
```

```python
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n=n+1
        u=4*u
    return(n)
```

2) Limite finie

Définition :
On dit que la suite (u_n) admet pour **limite L**,
si u_n est aussi proche de L que l'on veut à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite **convergente**.

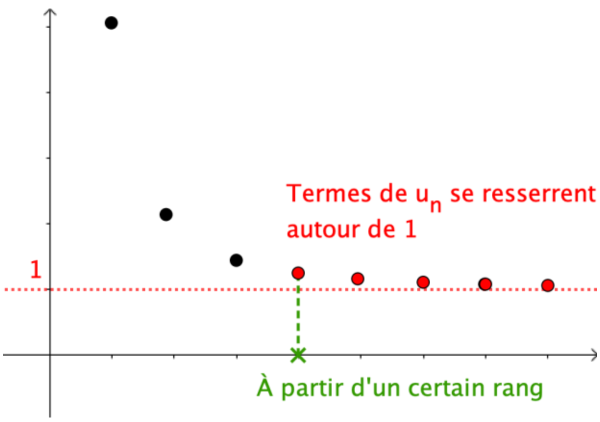
Exemple : La suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

On a par exemple :

$u_{100} = 1 + \dfrac{1}{100^2} = 1{,}000\,1$

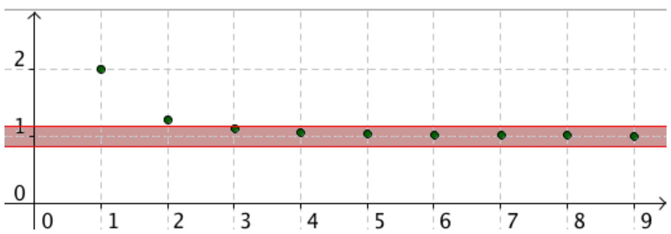
$u_{1\,000} = 1 + \dfrac{1}{1\,000^2} = 1{,}000\,001$

Les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.



Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.



Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1.
Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration de : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
Soit un intervalle quelconque ouvert $]-a\,;a[$, a réel positif non nul, contenant 0.
Pour tout n, tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in \,]-a\,;a[$
Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a\,;a[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Partie 3 : Opérations sur les limites

1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

Méthode : Calculer la limite d'une suite à l'aide des formules d'opération

Calculer les limites : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3)$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3}$

Correction

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \ \ donc \ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \ \ donc \ \lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+3) = +\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) \times (n^2+3) = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2 \leftarrow Dans\ la\ pratique, on\ ne\ l'écrit\ pas, car\ évident\ ! \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \ \ donc \ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty \ \ et\ donc \ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$

2) Cas des formes indéterminées

Il est important de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites afin de lever l'indétermination.

Les quatre **formes indéterminées** à reconnaître sont :

"$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

Méthode : Lever une indétermination à l'aide d'une factorisation (1)

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1$

Correction

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n} = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -3\sqrt{n} = -\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination :

$$n-3\sqrt{n} = n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1-\frac{3\left(\sqrt{n}\right)^2}{n\sqrt{n}}\right) = n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0 \; donc \; \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \end{cases}$

Donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1 = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -5n+1 = -\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$n^2-5n+1 = n^2\left(1-\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$

Donc, comme limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2} = 1 \end{cases}$

Donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

Soit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

Méthode : Lever une indétermination à l'aide de factorisations (2)

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$

Correction

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n^2} = 0 \text{ } donc \lim\limits_{n \to +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ } donc \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4 \end{cases}$ *comme limites de sommes*

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$.

Et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 + n = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n + 3 = +\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2 + n}{n + 3} = \frac{n^2}{n} \times \frac{3 + \frac{n}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \; donc \; \lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \; donc \; \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1 \qquad comme\ limites\ de\ sommes \end{cases}$

Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \dfrac{3}{1} = 3.$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty. \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 3 \end{cases}$

Donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = +\infty.$

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3} = +\infty.$

Méthode : Lever une indétermination à l'aide de l'expression conjuguée

Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Correction

• $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

• Or, comme limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$

Et donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0.$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0.$