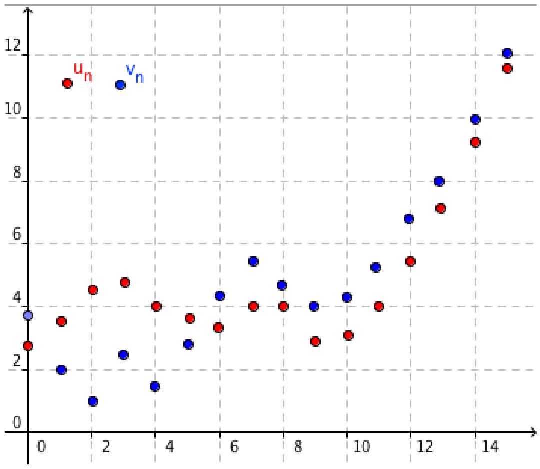
LES SUITES – Chapitre 2/2

Partie 1 : Limites et comparaison

1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :
Soit deux suites (u_n) et (v_n).
Si, à partir d'un certain rang, on a $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme :

Soit un nombre réel a.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a < u_n$.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leq v_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1\,;\,n_2)$, on a : $a < u_n \leq v_n$.
On en déduit que l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1\,;\,n_2)$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :
Soit deux suites (u_n) et (v_n).
Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

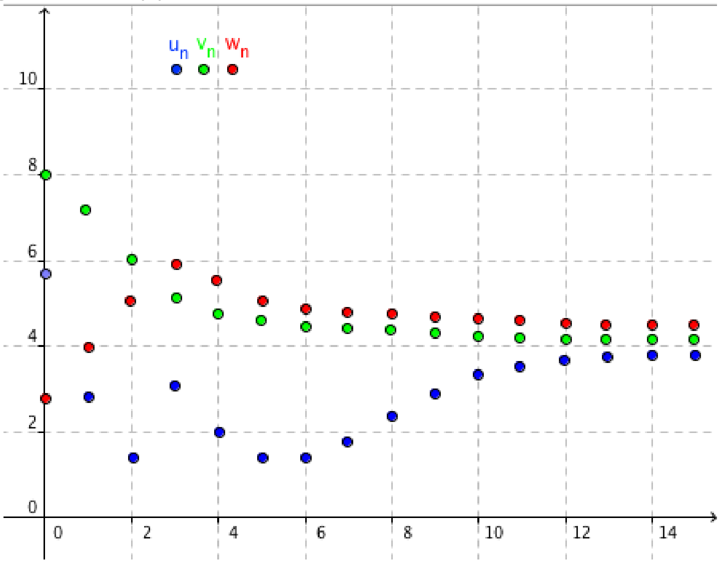
Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

Correction
On a :
$(-1)^n \geq -1$ donc :
$n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :
Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :
Soit un intervalle ouvert I contenant L.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1 ; n_2 ; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n).
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$

Correction
On a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc :
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$
Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$.

Remarque : On utilise le théorème de comparaison pour démontrer une limite infinie et le théorème d'encadrement pour une limite finie.

Partie 2 : Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions :

Définitions :
- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
- Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0. Mais elle n'est pas majorée.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Correction

- **Initialisation :**

$u_0 = 2 < 3$
La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k : $u_k < 3$.
  - Démontrons que : la propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+1} < 3$.

On a : $u_k < 3$

Donc : $\frac{1}{3} u_k < \frac{1}{3} \times 3$

$\frac{1}{3} u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$

Soit : $u_{k+1} < 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n < 3$. Donc (u_n) est majorée.

2) Convergence des suites monotones

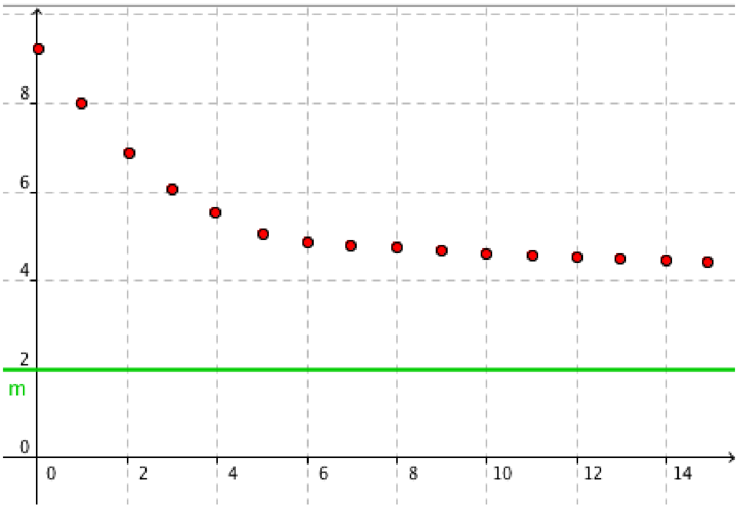
Propriété : Si une suite est croissante et admet pour limite L, alors elle est majorée par L.

Démonstration par l'absurde :
Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang p, tel que $u_p > L$. »
- L'intervalle ouvert $]L-1\,;\, u_p[$ contient L.
Or, par hypothèse, $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L-1\,;\, u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).
- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.
Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]L-1\,;\, u_p[$ (2).
(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.
Et donc la suite (u_n) est majorée par L.

Théorème de convergence monotone :
- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

- Admis -

Remarque :
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite est décroissante et minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2. Elle peut être égale à 4 !



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Correction

On a démontré dans le chapitre « LES SUITES – Chapitre 1/2 Partie 1 » que la suite (u_n) est croissante.
On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Corollaire :
1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration (du 1) au programme :

Soit un réel a.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.
Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$.
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie 3 : Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Propriété : Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison q et de premier terme u_0.

Alors, pour tout entier n, on a :

- $u_{n+1} = q \times u_n$ (forme de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite).

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de raison –3 et de premier terme 5.
On a : $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_n = 5 \times (-3)^n$.

2) Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	*Pas de limite*	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$:

Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$ (*inégalité de Bernoulli*), démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.
Or $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Exemple : La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

Un investisseur dépose 5 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5\,000$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10\,000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Puis calculer u_{10}.
5) Étudier les variations de (u_n).

Correction

1) $u_1 = 1{,}03u_0 + 300 = 5\,450$
$u_2 = 1{,}03u_1 + 300 = 5\,913{,}5$

2) $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10\,000 \\ &= 1{,}03u_n + 300 + 10\,000 \\ &= 1{,}03u_n + 10\,300 \\ &= 1{,}03(v_n - 10\,000) + 10\,300, \text{ car } v_n = u_n + 10\,000 \\ &= 1{,}03v_n - 10\,300 + 10\,300 \end{aligned}$$

$$= 1{,}03 v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme
$v_0 = u_0 + 10\,000 = 5\,000 + 10\,000 = 15\,000$.

3) Pour tout n, on a : $v_n = 15\,000 \times 1{,}03^n$.

4) $u_n = v_n - 10\,000 = 15\,000 \times 1{,}03^n - 10\,000$
On a alors : $u_{10} = 15\,000 \times 1{,}03^{10} - 10\,000 \approx 10\,158{,}75$

5) $u_{n+1} - u_n = 15\,000 \times 1{,}03^{n+1} - 10\,000 - (15\,000 \times 1{,}03^n - 10\,000)$
$= 15\,000 \times (1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n)$
$= 15\,000 \times 1{,}03^n \times (1{,}03 - 1)$
$= 450 \times 1{,}03^n > 0$
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n - 3^n$ $\qquad c)\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Correction

$a)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n}{3} = ?$

$((-2)^n)$ est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.
Donc $((-2)^n)$ ne possède pas de limite.
Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n - 3^n = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination :

$2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, comme limite d'une suite géométrique de raison $3 > 1$.

Donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

$c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.